

УДК 512.572

М. В. Зайцев, Д. Реповш

Экспоненциальный рост коразмерностей тождеств алгебр с единицей

В работе изучается асимптотическое поведение экспоненциально ограниченных последовательностей коразмерностей тождеств алгебр с единицей. Построена серия алгебр, у которых основание экспоненты увеличивается ровно на 1 при присоединении к исходной алгебре внешней единицы. Показано, что PI-экспоненты унитарных алгебр могут принимать любое значение больше двух, а экспоненты конечномерных унитарных алгебр образуют всюду плотное подмножество в области $[2, \infty)$.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: тождества, коразмерности, экспоненциальный рост.

§ 1. Введение

1.1. В статье изучаются функции, характеризующие количество тождественных соотношений, выполняющихся в той или иной алгебре. Каждой алгебре A над полем F нулевой характеристики можно сопоставить целочисленную последовательность $\{c_n(A)\}$, $n = 1, 2, \dots$, построенную по ее полилинейным тождествам. В асимптотическом поведении этой последовательности заложена определенная информация о строении самой алгебры A . Например, если A — ассоциативная алгебра, то $c_n(A) = 1$ для всех n тогда и только тогда, когда A — коммутативная нильпотентная алгебра. Если же $c_n(A) = 0$ для некоторого $n > 1$, то A нильпотентна, $A^n = 0$ (и наоборот). Недавно было показано, что $\{c_n(A)\}$ асимптотически возрастает, т.е. существует такое натуральное t , что $c_{t+j} \leq c_{t+j+1}$ для всех $j = 0, 1, \dots$. Если $c_{m-1} > c_m$, то это значение t тесно связано со ступенью нильпотентности радикала Джекобсона алгебры A (результат анонсирован в [1], полное доказательство опубликовано в [2]). Если поле F алгебраически замкнуто, а A проста, то $c_n(A) \sim d^n$, где $d = \dim A$ ([3]). Здесь соотношение $c_n(A) \sim d^n$ означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)} = d.$$

Такой же эффект наблюдается и в случае алгебр Ли [4], йордановых алгебр, альтернативных алгебр и ряда других классов [5]. Для алгебр Ли хорошо известна открытая проблема классификации бесконечномерных простых алгебр Ли. В настоящее время эта проблема, видимо, далека от своего решения, однако определенную информацию о строении такой алгебры L можно получить, если $\{c_n(L)\}$ имеет экспоненциальный рост [6].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00234а) и СПА (гранты P1-0292-0101, J1-5435-0101 и J1-6721-0101).

1.2. Наличие или отсутствие единицы в алгебре существенно сказывается на структуре ее тождеств. Например, если A — ассоциативная алгебра с единицей, то совокупность всех ее тождеств полностью определяется системой так называемых собственных тождеств [7]. Если, кроме того, A удовлетворяет всем тождествам матричной алгебры 2×2 , то асимптотически для ее Т-идеала существует лишь счетное число явно описываемых вариантов [8]. Если $\{c_n(A)\}$ растет полиномиально, то $c_n(A) = qn^k + O(n^{k-1})$. Для некоторого целого k и положительного рационального q [9]. Позднее было показано, что при фиксированном k для любого $q \in \mathbb{Q}, q > 0$, можно подобрать подходящую алгебру [10]. И в той же работе было доказано, что если A — унитарная алгебра, то

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{i=2}^k \frac{(-1)^k}{i!} \simeq \frac{1}{e}.$$

Еще один положительный эффект наличия единицы проявился в доказательстве следующей гипотезы. А. Реев в качестве уточнения гипотезы Амичура предположил, что

$$c_n(A) \simeq Cn^{\frac{1}{2}}d^n$$

для любой ассоциативной PI-алгебры, где t и n — целые, $C = \text{const}$. После серии частных результатов в 2008 г. гипотеза Реева была подтверждена для алгебр с 1 [11], [12]. И только недавно была доказана справедливость этой гипотезы в общем случае [1], [2].

В работе [13] для всех вещественных $\gamma > 1$ были построены примеры конечномерных алгебр с экспоненциальным ростом коразмерностей $c_n \sim \gamma' \approx \gamma$. Как показано в [14], для конечномерных алгебр с 1 экспоненциальный рост не может быть медленнее чем 2^n .

В работе [15] было отмечено, что если A — ассоциативная PI-алгебра, а $A^\#$ — алгебра, полученная из A путем присоединения внешней единицы, то $\exp(A^\#) = \exp(A)$ или $\exp(A) + 1$. Это несложное утверждение вытекает из результатов [16], [17], где не только было доказано существование предела

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

для любой ассоциативной PI-алгебры A , но и предложена процедура вычисления этой величины. Тем не менее, это наблюдение позволило выдвинуть гипотезу, что $\exp(A^\#)$ всегда равняется $\exp(A)$ или $\exp(A) + 1$. Первый нетривиальный пример, подтверждающий эту гипотезу, был построен в [14], еще один пример предложен в [18], а в [19] приведена уже серия примеров, в которых для любой алгебры A из работы [13] с $\exp(A) = \gamma \in \mathbb{R}, 1 \leq \gamma \leq 2$, ее расширение $A^\#$ имеет экспоненту $\exp(A^\#) = \gamma + 1 \in [2, 3]$. Заметим также, что в работе [20] автором была предложена конструкция построения по алгебре Ли L над полем F алгебры Пуассона, равной $L \oplus F$ как векторное пространство и содержит L в качестве подалгебры Ли коразмерности 1. Алгебру $L \oplus F$ можно считать естественной модификацией алгебры $L^\#$. Несколько позже тот же автор доказал, что $\exp(L \oplus F) = \exp(L) + 1$ [21].

1.3. Основной целью данной работы является построение семейства алгебр A_γ , $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 1$, для которых $\exp(A_\gamma) = \gamma$ (теорема 1), $\exp(A_\gamma^\#) = \gamma + 1$ (теорема 2). Отметим, что при построении этих примеров использовались бесконечные периодические слова и слова Штурма, комбинаторные свойства которых использовались при получении асимптотических оценок.

Кроме еще одного подтверждения упомянутой гипотезы, эти результаты показывают, что любое вещественное число $\gamma \geq 2$ может быть реализовано как PI-экспонента унитарной алгебры (следствие 1). Кроме того, из теоремы 2 и ряда комбинаторных свойств бесконечных слов следует, что PI-экспоненты конечномерных унитарных алгебр образуют всюду плотное подмножество в области $[2, \infty)$.

С основами теории тождественных соотношений и количественной PI-теории можно познакомиться в монографиях [22], [23], [24].

§ 2. Основные понятия и конструкции

2.1. Пусть A — алгебра над полем F , а $F\{X\}$ — абсолютно свободная F -алгебра с бесконечным множеством порождающих X . Полином $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\{X\}$, $x_1, \dots, x_n \in X$, называется тождеством A , если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых $a_1, \dots, a_n \in A$. Множество всех тождеств $Id(A)$ алгебры A образует идеал в $F\{X\}$. Обозначим через P_n подпространство всех полилинейных многочленов от x_1, \dots, x_n в $F\{X\}$. Тогда $P_n \cap Id(A)$ — множество всех полилинейных тождеств степени n алгебры A . Хорошо известно, что в случае нулевой характеристики основного поля идеал $Id(A)$ полностью определяется набором подпространств $\{P_n \cap Id(A)\}$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через $P_n(A)$ факторпространство

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)},$$

а через $c_n(A)$ — его размерность:

$$c_n(A) = \dim P_n(A).$$

Величина $c_n(A)$ называется n -й коразмерностью тождеств алгебры A (или просто n -й коразмерностью A) и является одной из количественных характеристик совокупности тождественных соотношений алгебры A . Исследование асимптотического поведения последовательности $\{c_n(A)\}$ — одна из ключевых задач количественной PI-теории.

В общем случае $\{c_n(A)\}$ может иметь сверхэкспоненциальный рост. Например, если $A = F\{X\}$, то

$$c_n(A) = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} n!,$$

если A — свободная ассоциативная алгебра, то $c_n(A) = n!$, а если A — свободная алгебра Ли, то $c_n(A) = (n-1)!$. Однако во многих случаях рост последовательности $\{c_n(A)\}$ ограничен экспоненциальной функцией. Класс алгебр с экспоненциально ограниченным ростом коразмерностей включает себя все ассоциативные PI-алгебры [25], все конечномерные алгебры [26] любой сигнатуры,

алгебры Каца-Мули [27], бесконечномерные простые алгебры Ли картановского типа [28] и целый ряд других. В этом случае определены верхний и нижний пределы

$$\overline{\exp}(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \quad \underline{\exp}(A) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

которые называются верхней и нижней РИ-экспонентами A . Если существует обычный предел, т.е. $\overline{\exp}(A) = \underline{\exp}(A)$, то его называют (обычной) РИ-экспонентой.

2.2. При изучении асимптотики роста $\{c_n(A)\}$ полезным инструментом служит теория представлений симметрических групп. Группа S_n естественным образом действует на P_n :

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

При этом подпространство $P_n \cap Id(A)$ инвариантно относительно этого действия, и поэтому $P_n(A)$ также наделяется структурой $F[S_n]$ -модуля. Все необходимые сведения по теории представлений симметрических групп и ее применению при исследовании тождественных соотношений можно найти в [29], [22], [23], [24]. В силу полной приводимости представлений группы S_n модуль $P_n(A)$ раскладывается в прямую сумму неприводимых $F[S_n]$ -модулей, что удобно записывать на языке теории характеров. Характер $\chi(P_n(A))$ называется n -м кохарактером A и обозначается как $\chi_n(A)$. Разложение $P_n(A)$ на неприводимые компоненты записывается как разложение $\chi_n(A)$ в сумму неприводимых характеров:

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad (2.1)$$

где χ_λ — характер неприводимого представления S_n , соответствующего разбиению λ числа n , а неотрицательное целое число m_λ — его кратность. Соотношение (2.1) в частности означает, что

$$c_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda, \quad (2.2)$$

где $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$ — размерность неприводимого представления группы S_n , соответствующего разбиению λ . Для получения оценок роста коразмерностей нам потребуется еще одна величина, называемая n -й кодлинной алгебры A , определяемая как

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda,$$

где m_λ — коэффициенты из правой части (2.2). Очевидно, что

$$c_n(A) \leq l_n(A) \max\{d_\lambda | \lambda \vdash n, m_\lambda \neq 0\}. \quad (2.3)$$

Нам потребуется более детальная информация о строении неприводимых $F[S_n]$ -модулей. Напомним, что разбиением λ числа n называется упорядоченный набор целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, такой, что $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Число $h(\lambda) = k$ называется высотой λ . По разбиению λ строится таблица из n клеток, называемая диаграммой Юнга D_λ . Она состоит из k строк и содержит λ_j клеток в j -й строке для каждого $j = 1, \dots, k$. Если в

клетки диаграммы D_λ записаны числа $1, \dots, n$, то полученная конструкция называется таблицей Юнга T_λ . Известно, что любой неприводимый $F[S_n]$ -модуль изоморфен минимальному левому идеалу $F[S_n]e_{T_\lambda}$ группового кольца группы S_n , где элемент e_{T_λ} строится следующим образом.

Обозначим через R_{T_λ} подгруппу всех подстановок, переставляющих числа $1, \dots, n$ только в пределах строк таблицы T_λ . Ясно, что $R_{T_\lambda} \simeq S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$. Аналогично определяется подгруппа C_{T_λ} , элементы которой не выводят каждое число за пределы столбца T_λ . Положим

$$R(T_\lambda) = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma, \quad C(T_\lambda) = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (\text{sgn } \tau) \tau$$

и

$$e_{T_\lambda} = R(T_\lambda)C(T_\lambda).$$

Характер этого модуля и называется неприводимым характером χ_λ . Элемент e_{T_λ} называется симметризатором Юнга и является квазиидемпотентом кольца $F[S_n]$, т.е. $e_{T_\lambda}^2 = \gamma e_{T_\lambda}$, где γ — ненулевой скаляр. Отсюда в частности следует, что элемент $C(T_\lambda)e_{T_\lambda}$ не равен нулю и порождает тот же самый минимальный левый идеал $F[S_n]e_{T_\lambda}$. В контексте действия S_n на пространстве полилинейных многочленов P_n это позволяет сделать несложный, но важный вывод.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть M — неприводимый $F[S_n]$ -подмодуль в P_n . Тогда M порождается как $F[S_n]$ -модуль полилинейным многочленом со следующими свойствами:

- множество переменных, входящих в f , распадается в объединение непересекающихся подмножеств

$$\{x_1, \dots, x_n\} = X_1 \cup \dots \cup X_t,$$

где $t = \lambda_1$ — длина первой строки D_λ , $|X_j|$ — высота j -го столбца D_λ , $j = 1, \dots, k$;

- полином f кососимметричен по каждому из наборов X_1, \dots, X_t .

2.3. Для оценок размерностей неприводимых представлений S_n удобно пользоваться функцией $\Phi(\lambda)$, задаваемой на разбиениях следующим образом.

Пусть сначала $0 \leq x_1, \dots, x_d \leq 1$ — любые вещественные числа, такие, что $x_1 + \dots + x_d = 1$, а $d \geq 2$. Положим

$$\Phi(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{x_1^{x_1} \dots x_d^{x_d}}. \quad (2.4)$$

Мы будем пользоваться непрерывностью функции Φ и тем свойством, что если зафиксировать значения всех переменных, кроме x_i, x_j , то максимум Φ достигается при $x_i = x_j$. Более того, если $x_i > x_j$, то $\Phi(x_i - \varepsilon, x_j + \varepsilon)$ растет с ростом ε от 0 до $\frac{1}{2}(x_i - x_j)$. Если же зафиксировать одну из переменных, например, $x_d = \gamma$, то максимум достигается при $x_1 = \dots = x_{d-1}$, т.е.

$$\max \Phi = \Phi(\theta, \dots, \theta, \gamma), \quad \text{где } (d-1)\theta + \gamma = 1.$$

Мы будем использовать обозначение

$$\Phi_{d-1}(\gamma) = \Phi(\underbrace{\theta, \dots, \theta}_{d-1}, \gamma), \quad (d-1)\theta + \gamma = 1. \quad (2.5)$$

Пусть теперь $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \vdash n$ и $d \geq t$. Мы будем записывать λ в виде $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ даже если $t < d$, полагая $\lambda_{t+1} = \dots = \lambda_d = 0$. Тогда

$$\Phi(\lambda) = \Phi\left(\frac{\lambda_1}{n}, \dots, \frac{\lambda_d}{n}\right).$$

Очевидно, что значение $\Phi(\lambda)$ не зависит от $d \geq t$, если использовать соглашение $0^0 = 1$.

Значение $\Phi(\lambda)$ и степень характера $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$ связаны следующим соотношением.

ЛЕММА 2.1. [30; лемма 1] *Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \vdash n$ — разбиение n на $t \leq d$ компонент и $n \geq 100$. Тогда*

$$\frac{\Phi(\lambda)^n}{n^{d^2+d}} \leq d_\lambda \leq n\Phi(\lambda)^n.$$

Нам потребуется следующее свойство функции Φ . Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ — два разбиения числа n , $\lambda_q, \mu_q > 0$. Мы будем говорить, что диаграмма Юнга D_μ получена из диаграммы D_λ выталкиванием вниз одной клетки, если существуют такие $1 \leq i < j \leq q$, что $\mu_i = \lambda_i - 1$, $\mu_j = \lambda_j + 1$ и $\mu_k = \lambda_k$ для всех остальных $1 \leq k \leq q$. Если же $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, $\lambda_q > 0$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q, 1) \vdash n$, то D_μ получена выталкиванием вниз одной клетки из D_λ , если одна из строк D_μ на одну клетку короче, чем у D_λ , а все остальные, кроме последней, имеют ту же длину.

ЛЕММА 2.2. [30; лемма 3], [31; лемма 2] *Пусть D_μ получена из D_λ выталкиванием вниз одной клетки. Тогда $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda)$.*

Мы также будем использовать и такое свойство функции $\Phi(x_1, \dots, x_d)$.

ЛЕММА 2.3. [19; лемма 2] *Пусть $\Phi(x_1, \dots, x_d)$ задана формулой (2.4) и пусть $\Phi(z_1, \dots, z_d) = a$ для некоторых фиксированных значений z_1, \dots, z_d . Тогда*

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \{\Phi(y_1, \dots, y_d, 1-t) | y_1 = tz_1, \dots, y_d = tz_d\} = a + 1,$$

причем максимум достигается при $t = \frac{a}{a+1}$.

Лемма 2.3 фактически означает, что при добавлении к диаграмме D_λ одной дополнительной строки значение функции $\Phi(\lambda)$ увеличивается не более чем на единицу.

2.4. Для построения примеров алгебр с заданным характером поведения $\{c_n(A)\}$ мы воспользуемся подходом, впервые предложенном в работе [13] и базирующемся на комбинаторных свойствах бесконечных двоичных слов. Для этого напомним некоторые понятия.

Пусть $w = w_1 w_2 \dots$ — бесконечное слово в двоичном алфавите, т.е. все w_i равны 0 или 1. Сложностью слова w называется функция натурального

аргумента $Comp_w(n)$, равная количеству различных подслов в w длины n . Если слово w периодическое, то $Comp_w(n) = const = T$ для всех $n \geq T$, где T — период w . Известно также, что если w не является периодическим, то $Comp_w(n) \geq n + 1$ для всех $n \geq 1$ [32]. Сумму $w_{k+1} + \dots + w_{k+m}$ конечного подслова $u = w_{k+1} \dots w_{k+m}$ принято обозначать как $h(u)$, а длину как $|u|$.

Для заданного слова w величина

$$\pi(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(w_1 \dots w_n)}{n} \quad (2.6)$$

называется наклоном слова w , если предел в правой части (2.6) существует.

Если $comp_w(n) = n + 1$ для всех $n \geq 1$, то слово w называется словом Штурма. Слова Штурма обладают следующими свойствами [32].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть w — периодическое слово или слово Штурма. Тогда существует такая константа C , что

- (1) $|h(x) - h(y)| \leq C$ для любых конечных подслов x и y одинаковой длины;
- (2) наклон $\pi(w)$ всегда существует;
- (3) для любого конечного подслова u в w

$$\left| \frac{h(u)}{|u|} - \pi(w) \right| \leq \frac{C}{|u|};$$

- (4) для любого вещественного $\alpha \in (0; 1)$ существует w с $\pi(w) = \alpha$ и w является периодическим, если α — рациональное число, либо словом Штурма, если α — иррациональное. Более того, можно взять $C = 1$, если w — слово Штурма, либо $C = T$, если w — периодическое слово с периодом T , и тогда

$$\pi(w) = \frac{h(w_1 \dots w_T)}{T}.$$

В дальнейшем мы будем также считать слова из одних нулей или из одних единиц периодическими, и тогда предложение 1 распространяется и на случаи $\alpha = 0, \alpha = 1$.

§ 3. Слова Штурма и неассоциативные алгебры

В данном параграфе мы построим семейство неассоциативных алгебр, PI-экспоненты которых принимают любые вещественные значения из области $[2; \infty)$. Идея построения алгебр с заданным ростом коразмерностей на базе слов Штурма впервые была предложена и реализована в работах [33], [13], где для любого вещественного $1 \leq \alpha \leq 2$ была построена алгебра A_α с $exp(A_\alpha) = \alpha$. В недавней работе [19] было доказано, что если к A_α присоединить внешнюю единицу, то у полученной алгебры $A_\alpha^\#$ экспонента существует и равна $\alpha + 1$. Построенная ниже серия алгебр обобщает конструкцию, предложенную в [13]. Следует отметить, что примеры алгебр с произвольной PI-экспонентой $\alpha \geq 2$ также были приведены в [13], однако попытки их использования для построения унитарных алгебр с экспонентами больше трех не привели к успеху. Это и вызвало необходимость построения новых примеров.

3.1. Пусть m и d — натуральные числа, $m \geq 2, d \leq m - 1$, и $w = w_1 w_2 \dots$ — бесконечное слово в двоичном алфавите $\{0; 1\}$. Рассмотрим бесконечную последовательность (m_1, m_2, \dots) , в которой $m_j = m + w_j$ для всех $j \geq 1$. Алгебра $A(m, d, w)$ задается своим базисом

$$\{a_i, b, z_{jk}^i | 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m_k, k = 1, 2, \dots\}$$

и таблицей умножения

$$z_{jk}^i a_i = \begin{cases} z_{j+1,k}^i, & \text{если } j < m_k \\ 0, & \text{если } j = m_k, \end{cases}$$

$$z_{m_k,k}^i b = \begin{cases} z_{1k}^{i+1}, & \text{если } i < d \\ z_{1,k+1}^1, & \text{если } i = d. \end{cases}$$

Все остальные произведения базисных элементов равны нулю. Отметим некоторые свойства алгебры $A(m, d, w)$:

- алгебра $A(m, d, w)$ удовлетворяет тождеству $x_1(x_2 x_3) \equiv 0$,
- линейная оболочка $\langle z_{jk}^i | 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m_k, k \geq 1 \rangle$ является идеалом в $A(m, d, w)$ с нулевым умножением коразмерности $d + 1$,
- если $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — полилинейный многочлен степени $n \geq d + 3$, кососимметричный по x_1, \dots, x_{d+3} , то $f \equiv 0$ — тождество в $A(m, d, w)$,
- если $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — полилинейный многочлен степени $n \geq 2d + 4$, кососимметричный по x_1, \dots, x_{d+2} и по x_{d+3}, \dots, x_{2d+4} , то $f \equiv 0$ — тождество в $A(m, d, w)$.

Замечание 1 из предыдущего параграфа сразу же приводит к такому результату.

ЛЕММА 3.1. Пусть $A(m, d, w)$ — алгебра, заданная бесконечным словом w и целочисленными параметрами $m \geq 2$ и $1 \leq d \leq m - 1$. Если

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \quad (3.1)$$

— n -й кохарактер алгебры A , то $m_\lambda \neq 0$ в (3.1) только при $h(\lambda) \leq d + 2$, где $h(\lambda)$ — высота λ , т.е. число строк в диаграмме D_λ . Кроме того, если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2})$ и $m_\lambda \neq 0$, то $\lambda_{d+2} \leq 1$.

3.2. Для получения верхней оценки на рост $\{c_n(A(m, d, w))\}$ нам необходимо сначала ограничить рост кодлины $\{l_n(A(m, d, w))\}$.

Пусть сначала A — произвольная алгебра. Обозначим через $R = R(y_1, y_2, \dots)$ относительно свободную алгебру многообразия $\text{var}(A)$, порожденного алгеброй A , а через

$$W_n^{(p)}(A) = \text{Span}\{y_{i_1} \dots y_{i_n} | 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq p\}$$

линейную оболочку всех одночленов степени n от y_1, \dots, y_p со всевозможными расстановками скобок, т.е. всех однородных степени n полиномов от y_1, \dots, y_p в R .

ЛЕММА 3.2. [13; лемма 4.1] Пусть A — алгебра с n -м кохарактером $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Тогда для любого $\lambda \vdash n$ с $h(\lambda) \leq p$ выполняется неравенство

$$m_\lambda \leq \dim W_n^{(p)}(A). \quad (3.2)$$

Всюду в дальнейшем мы будем опускать скобки в левонормированном произведении, т.е. записывать $(zt)v$ как ztv . Это соглашение особенно удобно при работе с алгебрами $A(m, d, w)$, поскольку все ненулевые произведения в них левонормированы в силу тождества $x_1(x_2x_3) \equiv 0$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $A = A(m, d, w)$ задана m, d и бесконечным словом w . Тогда

$$\dim W_n^{(p)}(A) \leq d(m+1)n^{(d+1)p} \text{Comp}_w(n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через W линейную оболочку одночленов вида $ty_{i_1} \dots y_{i_{n-1}}$, где $t = y_{p+1}$, $1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq p$. Тогда

$$\dim W_n^{(p)}(A) \leq p \dim W.$$

Пусть y — некоторый элемент из W . Ясно, что y — ненулевой тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\sigma : R \rightarrow A$, при котором $\sigma(y) \neq 0$.

Чтобы получить оценку на размерность W рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $F \langle a_1, \dots, a_d, b \rangle$ — свободная ассоциативная алгебра с порождающими a_1, \dots, a_d, b и M — свободный правый $F \langle a_1, \dots, a_d, b \rangle$ -модуль с одним порождающим x . Тогда любой элемент из M можно записать в виде линейной комбинации элементов вида $xf(a_1, \dots, a_d, b)$, где $f(a_1, \dots, a_d, b)$ — одночлен от a_1, \dots, a_d, b .

Пусть теперь σ — гомоморфизм из R в A . Ясно, что условие $\sigma(y) = 0$, $y \in W$, достаточно проверить только для всех гомоморфизмов вида

$$\sigma(t) = z_{jk}^i, \sigma(y_s) = \alpha_1^s a_1 + \dots + \alpha_d^s a_d + \beta^s b, 1 \leq s \leq p,$$

где α_r^s, β^s — любые скаляры из F .

Рассмотрим кольцо многочленов $F[\alpha_r^s, \beta^s]$, $1 \leq s \leq p, 1 \leq r \leq d$, в котором α_r^s, β^s уже рассматриваются как переменные. Для краткости мы будем обозначать его как $F[\alpha, \beta]$. Пусть $\psi : W \rightarrow M \otimes F[\alpha, \beta]$ — линейное отображение, заданное как

$$\psi(ty_{i_1} \dots y_{i_{n-1}}) = x(\alpha_1^{i_1} a_1 + \dots + \alpha_d^{i_1} a_d + \beta^{i_1} b) \dots (\alpha_1^{i_{n-1}} a_1 + \dots + \alpha_d^{i_{n-1}} a_d + \beta^{i_{n-1}} b), \quad (3.3)$$

Заметим, что если

$$h = \sum \lambda_{i_1 \dots i_{n-1}} ty_{i_1} \dots y_{i_{n-1}},$$

то $\psi(h) = 0$ только если $h \equiv 0$ — тождество в A , т.е. h — нулевой элемент относительно свободной алгебры $R(y_1, y_2, \dots)$. Это означает, что (3.3) корректно определяет ψ и что ψ — вложение W в $M \otimes F[\alpha, \beta]$.

Обозначим через φ_{jk}^i линейное отображение из M в A , для которого

$$\varphi_{jk}^i(xf(a_1, \dots, a_d, b)) = z_{jk}^i f(a_1, \dots, a_d, b), \quad (3.4)$$

где многочлен в правой части (3.4) интерпретируется как многочлен от правых умножений на a_1, \dots, a_d, b в алгебре A . Положим

$$I = \bigcap_{i,j,k} \ker \varphi_{jk}^i.$$

Если $y \in M/I \otimes F[\alpha, \beta]$, то при любой спецификации переменных $\{\alpha_r^s, \beta^s\}$ в поле F и при любой подстановке $\varphi_{jk}^i : M \rightarrow A$ элемент y переходит в ноль. Это означает, что W вложено в $M/I \otimes F[\alpha, \beta]$. Более того, W вложено в $M/I \otimes F[\alpha, \beta]^{(n-1)}$, где $F[\alpha, \beta]^{(n-1)}$ — подпространство однородных многочленов степени $n-1$ в $F[\alpha, \beta]$. В частности,

$$\dim W \leq \dim F[\alpha, \beta]^{(n-1)} \cdot \dim M/I.$$

Очевидно, что

$$\dim F[\alpha, \beta]^{(n-1)} \leq (n-1)^{dp+p} \leq n^{(d+1)p}.$$

Теперь оценим сверху размерность M/I . Зафиксируем индексы i, j, k . Заметим сначала, что из правил умножения базисных элементов в A следует, что существует ровно один одночлен $f_{j,k}^i$, не лежащий в ядре $\varphi_{j,k}^i$:

$$f_{j,k}^i = x \underbrace{a_i \dots a_i}_{m_k-j} \underbrace{b a_{i+1} \dots a_{i+1}}_{p_1} b \dots b \underbrace{a_{i+r} \dots a_{i+r}}_{p_r} \underbrace{b a_{i+r+1} \dots a_{i+r+1}}_s,$$

где индексы у $a_{i+1} \dots a_{i+r+1}$ вычисляются по модулю d , $m_k - j + p_1 + \dots + p_r + s + r + 1 = n - 1$, $s \leq d$, а все p_1, \dots, p_r равны одному из m_k, m_{k+1}, \dots и определяются однозначно подсловом $w(k, k+n-1) = (w_k, w_{k+1}, \dots, w_{k+n-1})$ длины n слова w . В частности, $f_{j,k}^i = f_{j,l}^i$ и $\ker \varphi_{j,k}^i = \ker \varphi_{j,l}^i$, если $w(k, k+n-1) = w(l, l+n-1)$ в слове w . Так как $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq m+1$, то число различных ядер $\ker \varphi_{j,k}^i$ не превосходит $d(m+1)Comp_w(n)$. Следовательно,

$$\dim \frac{M}{I} \leq d(m+1)Comp_w(n), \quad \dim W_n^{(p)}(A) \leq d(m+1)n^{(d+1)p}Comp_w(n),$$

и лемма доказана.

В качестве следствия мы получаем оценку роста кодлинны для алгебры, заданной словом Штурма или бесконечным периодическим словом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $A = A(m, d, w)$, где w — слово Штурма или бесконечное периодическое слово. Тогда

$$l_n(A) \leq 2d^2(m+1)n^{(d+1)(d+3)}(n+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.1 мы имеем: $h(\lambda) \leq d+2, \lambda_{d+2} \leq 1$ для любого разбиения $\lambda \vdash n$ с ненулевой кратностью m_λ . Количество таких разбиений на превосходит $2dn^{d+1}$. Поэтому леммы 3.2 и 3.3 дают требуемую оценку.

3.3. Теперь мы можем приступить к получению верхних оценок PI-экспонент.

Пусть $A = A(m, d, w)$ — алгебра, построенная по бесконечному слову w , где w — периодическое слово или слово Штурма. Если $f = f(z_{jk}^i, a_1, \dots, a_d, b)$ — ассоциативное слово в алфавите $\{z_{jk}^i, a_1, \dots, a_d, b\}$, то можно говорить о его степенях $\deg_b f, \deg_{a_i} f, \deg_{z_{jk}^i} f$ по переменным, об общей степени $\deg f$, а также о значении f в A , если рассматривать его как левонормированное произведение базисных элементов.

Нам понадобится одно достаточное условие того, что $f \neq 0$.

ЛЕММА 3.4. *Для заданных m, d, w найдется такая последовательность $\{\varepsilon_n > 0\}, n = 1, 2, \dots$, что если $f = f(z_{jk}^i, a_1, \dots, a_d, b)$ — одночлен степени n , не равный нулю в $A(m, d, w)$, то*

$$\frac{\deg_b f}{n} \leq \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_n,$$

где $\alpha = \pi(w)$ — наклон слова w . При этом $\varepsilon_n \rightarrow 0$, если $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слово f можно записать в виде $f = ZPQ$, где Z — произведение базисных элементов $\{z_{jk}^i, a_\alpha, b\}$ степени $\deg Z \leq (m + 1)d$, $Q = Q(a_1, \dots, a_d, b)$, $\deg Q \leq (m + 1)d$, а

$$P = a_1^{m_k-1} b \dots a_d^{m_k-1} b \dots a_1^{m_{k+t-1}-1} b \dots a_d^{m_{k+t-1}-1} b.$$

Тогда $\deg_b P = td$ и

$$\deg_{a_i} P = (m_k - 1) + \dots + (m_{k+t-1} - 1) = m_k + \dots + m_{k+t-1} - t = (m - 1)t + w_k + \dots + w_{k+t-1}$$

для любого $i = 1, \dots, d$. Как отмечено в предложении 1 для слова w существует такая константа C , что $|w_k + \dots + w_{k+t-1} - \alpha t| \leq C$. Поэтому

$$\deg P = dmt + d(w_k + \dots + w_{k+t-1}) \geq dt(m + \alpha - \frac{C}{t})$$

и $n = \deg f \geq \deg P$, а $\deg_b f \leq td + 2d = (t + 2)d$. Следовательно,

$$\frac{\deg_b f}{n} \leq \frac{1 + \frac{2d}{t}}{m + \alpha - \frac{C}{t}}.$$

Поскольку $n \leq d(m_k + \dots + m_{k+t-1}) + 2(m + 1)d \leq d(m + 1)t + 2(m + 1)d$, то

$$t \geq \frac{n}{d(m + 1)} - 2$$

и t растет линейно с ростом n . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\deg_b f}{n} = \frac{1}{m + \alpha},$$

откуда следует утверждение леммы.

Теперь мы получим оценку сверху на рост коразмерностей алгебры $A(m, d, w)$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $A = A(m, d, w)$, где w — бесконечное периодическое слово или слово Штурма с наклоном $\alpha = \pi(w)$. Тогда

$$\overline{\exp}(A) \leq \Phi_d\left(\frac{1}{m + \alpha}\right),$$

где функция Φ_d задана формулой (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное малое $\varepsilon > 0$ и покажем, что для него существует такое N , что если $n \geq N$, $\lambda \vdash n$ и $m_\lambda \neq 0$ в (3.1), то

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi_d\left(\frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon\right).$$

Пусть сначала $\lambda_{d+1} = 0$, т.е. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d, 0, 0)$. Тогда

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi\left(\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}, 0, 0\right) \leq \Phi\left(\underbrace{\theta, \dots, \theta}_d, \frac{1}{m + \alpha}\right) = \Phi_d\left(\frac{1}{m + \alpha}\right).$$

Пусть теперь $\lambda_{d+1} \neq 0$. Тогда в силу замечания 1 существует полилинейный многочлен $h = h(x_1, \dots, x_n)$ кососимметричный по λ_1 наборам переменных $X_1, \dots, X_{\lambda_1}$, причем $|X_1| = d + 1$ или $d + 2$ в зависимости от значения λ_{d+2} (0 или 1), а $|X_2| = \dots = |X_{\lambda_{d+1}}| = d + 1$, не являющийся тождеством A . Следовательно, существует такая подстановка $\varphi : X \rightarrow \{a_r, b, z_{jk}^i\}$, что $f = \varphi(h) = f(z_{jk}^i, a_1, \dots, a_d, b)$ — ненулевой одночлен в A . Тогда $\deg_b f \geq \lambda_{d+1}$, и по лемме 3.4

$$\frac{\lambda_{d+1}}{n} \leq \frac{\deg_b f}{n} \leq \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_n.$$

Если $\lambda_{d+2} = 0$, то

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi\left(\underbrace{\theta, \dots, \theta}_d, \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_n, 0\right) = \Phi_d\left(\frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_n\right) \leq \Phi_d\left(\frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon\right)$$

при всех больших n , поскольку $\varepsilon_n \rightarrow 0$ с ростом n , а функция $\Phi_d(\frac{1}{m+\alpha} + x)$ возрастает при увеличении x . Если же $\lambda_{d+2} = 1$,

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi\left(\underbrace{\theta, \dots, \theta}_d, \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_n, \frac{1}{n}\right).$$

Поскольку $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\theta, \dots, \theta, \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_n, \frac{1}{n}\right) = \Phi(\bar{\theta}, \dots, \bar{\theta}, \frac{1}{m + \alpha}, 0),$$

где $\bar{\theta}d + \frac{1}{m+\alpha} = 1$. Следовательно, найдется такое n , что

$$\Phi\left(\theta, \dots, \theta, \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_n, \frac{1}{n}\right) \leq \Phi(\theta', \dots, \theta', \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon, 0)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &\leq \Phi\left(\theta, \dots, \theta, \frac{1}{m+\alpha} + \varepsilon_n, \frac{1}{n}\right) \leq \Phi\left(\theta', \dots, \theta', \frac{1}{m+\alpha} + \varepsilon, 0\right) \\ &= \Phi_d\left(\frac{1}{m+\alpha} + \varepsilon\right),\end{aligned}$$

где $\theta'd + \frac{1}{m+\alpha} + \varepsilon = 1$ и $\theta' \geq \theta$. Поскольку

$$c_n(A) = \sum m_\lambda d_\lambda \leq l_n(A) \max\{d_\lambda | \lambda \vdash n, m_\lambda \neq 0\},$$

то из леммы 2.1 и предложения 2 следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \leq \Phi_d\left(\frac{1}{m+\alpha} + \varepsilon\right)$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\overline{exp}(A) \leq \Phi_d\left(\frac{1}{m+\alpha}\right),$$

и лемма доказана.

Теперь перейдем к нижней оценке роста коразмерностей алгебры $A(m, d, w)$.

ЛЕММА 3.6. Пусть $A(m, d, w)$ — алгебра из леммы 3.5. Тогда $\overline{exp}(A) \geq \Phi_d\left(\frac{1}{m+\alpha}\right)$, где $\alpha = \pi(w)$ — наклон слова w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим одночлен

$$h_1 = zx_1^1 x_2^1 \dots x_p^1 y_1^1 \dots x_1^d x_2^d \dots x_p^d y_d^1$$

в свободной алгебре $F\{X\}$ степени $(p+1)d+1$, где $p = m_1 - 1 \geq m - 1 \geq d$. Пусть $Alt_1^1 : P_{(p+1)d+1} \rightarrow P_{(p+1)d+1}$ — оператор альтернирования по $z, x_1^1, x_2^1, \dots, x_p^1, y_1^1$, а Alt_i^1 — оператор альтернирования по $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^d, y_i^1$ для всех $2 \leq i \leq d$. Если $p > d$, то обозначим также через Alt_{d+j}^1 альтернирование по $x_{d+j}^1, x_{d+j}^2, \dots, x_{d+j}^d$ для всех $1 \leq j \leq p - d$. Положим $f_1 = Alt_1^1 \dots Alt_p^1(h_1)$.

Рассмотрим подстановку $\varphi : X \rightarrow A$, при которой

$$\varphi(z) = z_{11}^1, \varphi(x_1^1) = \dots = \varphi(x_p^1) = a_1, \dots, \varphi(x_1^d) = \dots = \varphi(x_p^d) = a_d,$$

$$\varphi(y_1^1) = \dots = \varphi(y_d^1) = b.$$

Тогда

$$\varphi(f_1) = z_{11}^1 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{m_1-1} b \dots \underbrace{a_d \dots a_d}_{m_1-1} b = z_{12}^1.$$

Заметим, что результат подстановки φ не изменится (с точностью до ненулевого множителя), если применить ее не к самому элементу f_1 , а к его симметризации $Sym f_1$, где Sym означает симметризацию по наборам $\{x_1^1, \dots, x_p^1\}, \dots, \{x_1^d, \dots, x_p^d\}, \{y_1^1, \dots, y_d^1\}$. Тогда многочлен $Sym f_1$ порождает в $P_{(p+1)d+1}$ неприводимый $F[S_{(p+1)d+1}]$ -модуль, соответствующий разбиению $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2})$,

где $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = p = m_1 - 1$, $\lambda_{d+1} = d$, $\lambda_{d+2} = 1$, а условие $\varphi(\text{Sym } f_1) \neq 0$ означает, что кратность m_λ в разложении (2.1) не равна нулю.

Обозначим $p_1 = p$. Далее для всех $j = 2, 3, \dots$ строим многочлены f_2, f_3, \dots следующим образом. Если f_1, \dots, f_{j-1} уже построены, то берем

$$h_j = f_{j-1} x_{q+1}^1 \dots x_{q+p_j}^1 y_1^j \dots x_{q+1}^d \dots x_{q+p_j}^d y_d^j,$$

где $q = p_1 + \dots + p_{j-1}$, $p_j = m_j - 1$ и определяем f_j как

$$f_j = \text{Alt}_1^j \dots \text{Alt}_{p_j}^j(h_j),$$

где $\text{Alt}_1^j, \dots, \text{Alt}_d^j$ — альтернирования по наборам $\{x_{q+1}^1, \dots, x_{q+1}^d, y_1^j\}, \dots, \{x_{q+d}^1, \dots, x_{q+d}^d, y_d^j\}$ соответственно. Если же $p_j > d$, то Alt_{d+i}^j — альтернирование по $\{x_{q+d+i}^1, \dots, x_{q+d+i}^d\}$, $1 \leq i \leq p_j - d$. Расширим действие подстановки $\varphi : X \rightarrow A$, построенной на $(j-1)$ -м шаге, полагая

$$\varphi(x_{q+1}^1) = \dots = \varphi(x_{q+p_j}^1) = a_1, \dots, \varphi(x_{q+1}^d) = \dots = \varphi(x_{q+p_j}^d) = a_d,$$

$$\varphi(y_1^j) \dots \varphi(y_d^j) = b.$$

Тогда, как и прежде,

$$\varphi(\text{Sym } f_j) = \gamma z_{1,j+1}^1 \neq 0,$$

где симметризация Sym проводится по наборам

$$\{x_1^1, x_2^1, \dots, x_{q+p_j}^1\}, \dots, \{x_1^d, x_2^d, \dots, x_{q+p_j}^d\}, \{y_1^1, \dots, y_d^1\}, \dots, \{y_1^j, \dots, y_d^j\}.$$

Тогда, как и при $j = 1$, $\text{Sym } f_j$ порождает неприводимый модуль с характером χ_λ , где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2})$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = m_1 + \dots + m_j - j$, $\lambda_{d+1} = jd$, $\lambda_{d+2} = 1$, и $m_\lambda \neq 0$ в (2.1).

Таким образом, для каждого натурального t мы построили не являющийся тождеством многочлен f_t степени

$$n = n(t) = (m_1 + \dots + m_t)d + 1 = tmd + d(w_1 + \dots + w_t) + 1.$$

При этом ненулевое значение f_t принимает при подстановке $\varphi : X \rightarrow A$, когда элемент b подставляется td раз. Тогда по лемме 3.4

$$\frac{td}{n} \leq \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_n,$$

где $\alpha = \pi(w)$ — наклон w , а $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, симметризация $\text{Sym } f_t$ тоже не является тождеством в A , $\varphi(\text{Sym } f_t) = K \cdot \varphi(f_t)$, $K \neq 0$, и порождает в P_n неприводимый $F[S_n]$ -модуль с характером $\chi_{\lambda^{(n)}}$, где

$$\lambda^{(n)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2}), \lambda_1 = \dots = \lambda_d = m_1 + \dots + m_t - 1, \lambda_{d+1} = td, \lambda_{d+2} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_{d+1}}{n} = \frac{1}{m + \frac{w_1 + \dots + w_t}{t} + \frac{1}{td}} = \beta$$

и

$$\Phi(\lambda^{(n)}) = \Phi \left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{n}, \dots, \frac{\lambda_1}{n}}_d, \beta, \frac{1}{n} \right).$$

Чтобы получить оценку снизу на $\Phi(\lambda^{(n)})$, воспользуемся свойствами периодических слов и слов Штурма. Согласно предложению 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w_1 + \dots + w_t}{t} = \alpha,$$

а поскольку $mtd \leq n \leq (m+1)td$, то величину $\frac{w_1 + \dots + w_t}{t}$ можно сделать сколь угодно близкой к α для всех достаточно больших n . Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что

$$\beta = \frac{1}{m + \frac{w_1 + \dots + w_t}{t} + \frac{1}{td}} \geq \frac{1}{m + \alpha} - \varepsilon$$

при всех $n \geq N$. Тогда из свойств функции Φ мы получаем

$$\Phi(\lambda^{(n)}) \geq \Phi \left(\underbrace{\theta, \dots, \theta}_d, \frac{1}{m + \alpha} - \varepsilon, 0 \right) = \Phi_d \left(\frac{1}{m + \alpha} - \varepsilon \right),$$

где $\theta d + \frac{1}{m + \alpha} - \varepsilon = 1$.

Так как

$$c_n(A) \geq d_{\lambda^{(n)}} \geq \frac{1}{n^{(d+2)^2 + d + 2}} \Phi \left(\lambda^{(n)} \right)^n$$

в силу леммы 2.1, а $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то

$$\underline{\lim}_{n(t) \rightarrow \infty} \sqrt[n(t)]{c_{n(t)}(A)} \geq \Phi_d \left(\frac{1}{m + \alpha} \right).$$

Осталось заметить, что $c_n(A)$ — неубывающая последовательность и что $n(t+1) - n(t) \leq (m+1)d$, откуда следует равенство

$$\underline{\exp}(A) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_{n(t)}(A)} \geq \Phi_d \left(\frac{1}{m + \alpha} \right).$$

Лемма доказана.

Леммы 3.5 и 3.6 сразу же дают нам основной результат данного параграфа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть m и d — целые числа, $m \geq 2, 1 \leq d \leq m-1$, а w — бесконечное периодическое слово или слово Штурма с наклоном α . Тогда PI -экспонента алгебры $A(m, d, w)$ существует и равна

$$\exp(A) = \Phi_d \left(\frac{1}{m + \alpha} \right) = \Phi \left(\underbrace{\frac{m + \alpha - 1}{d(m + \alpha)}, \dots, \frac{m + \alpha - 1}{d(m + \alpha)}}_d, \frac{1}{m + \alpha} \right).$$

§ 4. Экспоненты алгебр с присоединенной единицей

4.1. Напомним, что если к алгебре A присоединяется внешним образом единица, то полученную в результате алгебру мы обозначаем как $A^\#$. Мы будем присоединять единицы к алгебрам $A(m, d, w)$, рассмотренным в предыдущем параграфе.

Нам понадобится технический результат из работы [19].

Напомним, что для заданной алгебры B через $W_n^{(p)}(B)$ обозначается подпространство всех однородных степени n многочленов от y_1, \dots, y_p в относительно свободной алгебре $R(y_1, y_2, \dots)$ многообразия $\text{var}(B)$ со свободными порождающими y_1, y_2, \dots .

ЛЕММА 4.1. [19; лемма 6] Пусть B — произвольная алгебра и пусть $\dim W_n^{(p)}(B) \leq \alpha n^T$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $T \in \mathbb{N}$. Тогда $\dim W_n^{(p)}(B^\#) \leq \alpha(n+1)^{T+p+1}$

Сначала мы оценим сверху рост кодлинны.

ЛЕММА 4.2. Пусть $A = A(m, d, w)$ — алгебра из предыдущего параграфа, где $m \geq 2, d \leq m-1, w$ — слово Штурма или бесконечное периодическое слово. Тогда

$$l_n(A^\#) \leq (n+1)^{3(d+3)^2}$$

для всех достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.3

$$\dim W_n^{(d+3)}(A) \leq d(m+1)n^{(d+1)(d+3)} \text{Comp}_w(n).$$

Так как сложность периодического слова — константа, а у слова Штурма она равна $n+1$, то

$$\dim W_n^{(d+3)}(A) \leq n^{(d+3)^2}$$

для всех достаточно больших n . Поэтому

$$\dim W_n^{(d+3)}(A^\#) \leq (n+1)^{2(d+3)^2}$$

по лемме 4.1. Из замечания 1 вытекает, что

$$\chi_n(A^\#) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq d+3}} m_\lambda \chi_\lambda,$$

а $m_\lambda \leq \dim W_n^{(d+3)}(A^\#) \leq (n+1)^{2(d+3)^2}$. И поскольку число разбиений $\lambda \vdash n$ с $h(\lambda) \leq d+3$ не превосходит $(n+1)^{d+3}$, то

$$l_n(A^\#) \leq (n+1)^{3(d+3)^2}.$$

Лемма 4.2 потребуется нам для верхней оценки РІ-экспоненты алгебры $A(m, d, w)^\#$. Но сначала мы оценим рост ее коразмерностей снизу.

ЛЕММА 4.3. Пусть $A = A(m, d, w)$ задана параметрами $m \geq 2, d \leq m-1$ и w . Тогда

$$\underline{\exp}(A^\#) \geq \exp(A) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве леммы 3.6 для любого $\delta > 0$ была выбрана возрастающая последовательность $n = n(t), t = t_0, t_0 + 1, \dots$, семейство разбиений $\lambda^{(n)} \vdash n(t)$ и набор полиномов $f_t, t \geq t_0$, со следующими свойствами:

- разбиение λ имеет вид $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2}), \lambda_1 = \dots = \lambda_d = m_1 + \dots + m_t - t, \lambda_{d+1} = td, \lambda_{d+2} = 1$,
- $\Phi(\lambda^{(n)}) \geq \Phi_d(\frac{1}{m+\alpha} - \delta)$, где α — наклон w ,
- $n(t+1) - n(t) \leq d(m+1)$ для всех $t \geq t_0$,
- симметризация f_t не является тождеством A и порождает неприводимый $F[S_n]$ -модуль с характером χ_λ ,
- f_t кососимметричен по λ_1 наборам переменных: один размера $d+2, td-1$ — размера $d+1$ и $\lambda_1 - \lambda_{d+1}$ — размера d .

Кроме того, $\exp(A) = \Phi_d(\frac{1}{m+\alpha})$.

Обозначим через $\tilde{h}_{t,k}$ произведение

$$\tilde{h}_{t,k} = f_t z_1 \dots z_k, k \geq 1.$$

Рассмотрим ту же подстановку φ , которая давала ненулевое значение для f_t и $Sym f_t$ и расширим ее действие на $\tilde{h}_{t,k}$, положив $\varphi(z_1) = \dots = \varphi(z_k) = 1$. Тогда, очевидно,

$$\varphi(\tilde{h}_{t,k}) = \varphi(f_t) \neq 0.$$

Более того, если $k \leq td$, то мы можем включить z_1, \dots, z_k в первые k кососимметричных набора у f_t и провести дополнительное альтернирование по расширенным наборам. При этом из правил умножения базисных элементов A следует, что

$$\varphi(Alt(\tilde{h}_{t,k})) = \gamma \varphi(\tilde{h}_{t,k}),$$

где γ — ненулевой целочисленный коэффициент. У полинома $f_{t,k} = Alt(\tilde{h}_{t,k})$ переменные тоже распределены по λ_1 кососимметричным наборам: один размера $d+3, k-1$ — размера $d+2, td-k$ — размера размера $d+1$ и $\lambda_1 - td$ — размера d . Более того, если провести его симметризацию по тем же переменным, что и для f_t плюс симметризацию по z_1, \dots, z_k , то значение $\varphi(Sym(f_{t,k}))$ тоже пропорционально $\varphi(f_t)$ с ненулевым коэффициентом. То есть полином $Sym(f_{t,k})$ порождает неприводимый $F[S_{n+k}]$ -модуль с характером χ_μ , где

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{d+3}), \mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_d = \lambda_d, \mu_{d+1} = \lambda_{d+1}, \mu_{d+2} = k, \mu_{d+3} = 1.$$

Аналогично доказывается, что все разбиения вида

$$\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_d, k, \lambda_{d+1}, 1), \mu = (k, \lambda_1, \dots, \lambda_{d+2})$$

имеют ненулевые кратности в характере $\chi_{n+k}(A^\#)$. Другими словами, мы можем добавить к диаграмме D_λ любую строку (1-ю, $d+1$ -ю либо $d+2$ -ю) и получить диаграмму D_μ , соответствующую разбиению $\mu \vdash n+k$ с ненулевой кратностью.

Оценим снизу максимальное значение $\Phi(\mu)$ и соответствующее этому максимальному значению k . Обозначим $\frac{\lambda_1}{n} = u_1, \dots, \frac{\lambda_{d+2}}{n} = u_{d+2}, \beta = \Phi(\lambda)$. Тогда по лемме 2.3

$$\Phi(\theta u_1, \dots, \theta u_{d+2}, 1 - \theta) = 1 + \Phi(\lambda) \quad (4.1)$$

— максимальное значение, которое может принимать $\Phi(\mu)$, где $\theta = \frac{\beta}{\beta+1}$. Это означает, что если k удовлетворяет двум неравенствам

$$\frac{k}{n+k} \leq 1 - \theta = \frac{1}{\beta+1} \leq \frac{k+1}{n+k+1}, \quad (4.2)$$

то максимум $\Phi(\mu)$ достигается либо при этом k , либо при $k+1$. Соотношение (4.2) равносильно двойному неравенству

$$\frac{n}{\beta} - 1 \leq k \leq \frac{n}{\beta}. \quad (4.3)$$

Напомним, что n и k зависят от t : $n = n(t)$, $k = k(t)$. Учитывая (4.3) и выбор $n(t)$, мы получаем

$$n(t+1) + k(t+1) - n(t) - k(t) \leq \frac{\beta+1}{\beta} d(m+1). \quad (4.4)$$

Обозначим $r = r(t) = n(t) + k(t)$, а через $\mu^{(r)}$ — разбиение $r(t)$ с максимальным значением $\Phi(\mu^{(r)})$. Так как с ростом n величину $\frac{1}{\beta+1}$ все более точно аппроксимируется дробью вида $\frac{k}{n+k}$, то можно с учетом (4.2) считать, что

$$\Phi(\mu^{(r)}) \geq \Phi(\lambda^{(n)}) + 1 - \delta'$$

при всех достаточно больших n , где $\delta' > 0$ — любая заранее заданная величина, $n = n(t)$, $r = r(t)$. Тогда с учетом леммы 2.1 мы имеем

$$c_{r(t)}(A^\#) \geq \frac{\Phi(\mu^{(r(t))})^n}{n^{(d+2)^2+d+3}} \geq \frac{(\Phi(\lambda^{(n)}) + 1 - \delta')^n}{n^{(d+2)^2+d+3}} \geq \frac{\left(\Phi_d\left(\frac{1}{m+\alpha} - \delta\right) + 1 - \delta'\right)^n}{n^{(d+2)^2+d+3}}. \quad (4.5)$$

Поскольку все разности $r(t+1) - r(t)$ ограничены общей константой (см. (4.4)), а последовательность $\{c_n(A^\#)\}$ — неубывающая, то из (4.5) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A^\#)} \geq \Phi_d\left(\frac{1}{m+\alpha} - \delta\right) + 1 - \delta'.$$

Наконец, так как δ и δ' — произвольные сколь угодно малые величины, мы получаем

$$\exp(A^\#) \geq \exp(A) + 1,$$

и лемма доказана.

4.2. Теперь мы получим верхнюю оценку на $\overline{\exp}(A)^\#$.

ЛЕММА 4.4.

$$\overline{\exp}(A^\#) \leq \exp(A) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как кодлина $l_n(A^\#)$ полиномиально ограничена согласно лемме 4.2, то достаточно доказать, что

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi_d\left(\frac{1}{m+\alpha}\right) + 1 = \exp(A) + 1,$$

для любого $\lambda \vdash n$ с $m_\lambda \neq 0$ в $\chi_n(A)$, как показывает соотношение (2.3).

Пусть $h = h(x_1, \dots, x_n)$ — полилинейный многочлен, не являющийся тождеством $A^\#$, порождающий в P_n неприводимый $F[S_n]$ -модуль с характером χ_λ . Как отмечалось ранее, можно считать h кососимметричным по λ_1 наборам переменных, причем λ_{d+2} из них имеют размер не меньше λ_{d+2} . Если $\lambda_{d+2} = 0$, то

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi(\underbrace{\frac{1}{d+1}, \dots, \frac{1}{d+1}}_{d+1}, 0, 0) = d+1 < 1 + \Phi_d(\frac{1}{m+\alpha}).$$

Пусть $\lambda_{d+2} \neq 0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $h \notin Id(A^\#)$, то существует подстановка φ базисных элементов A и 1 вместо переменных x_1, \dots, x_n , при которой

$$\varphi(h) = f(z_{jk}^i, a_1, \dots, a_d, b) = f$$

— ненулевой одночлен степени n' от $\{z_{jk}^i, a_1, \dots, a_d, b\}$, где $n' = n - n_1$, а n_1 — количество единиц из $A^\#$, подставленных вместо x_1, \dots, x_n .

Заметим, что λ_{d+3} может принимать только два значения — 0 или 1. Пусть сначала $\lambda_{d+3} = 1$. В этом случае в h есть $r = \lambda_{d+2}$ кососимметричных набора переменных размера не меньше $d+2$ и $\lambda_{d+1} - \lambda_{d+2}$ кососимметричных набора переменных размера $d+1$. В каждый из этих последних наборов подставлен один из элементов $\{1, b\}$. Пусть b подставлен ровно в k наборов, и $\lambda_{d+1} - \lambda_{d+2} = k + t$. Тогда $n_1 \geq r + t$ и

$$n'' = n - r - t \geq n - n_1 = n' = \deg_b f \geq r + k.$$

Если $\lambda_{d+1} > \lambda_{d+2}$, то перебрасывая клетки из $(d+1)$ -й строки диаграммы D_λ в $(d+2)$ -ю, можно получить разбиение $\lambda' \vdash n$, у которого либо $(d+2)$ -я строка $D_{\lambda'}$ имеет длину $r+k$ (если $k \leq t$), либо $(d+1)$ -я имеет длину $r+k$ (если $k > t$). Вычеркнув эту строку, мы получаем разбиение $\mu \vdash n''$, у которого $\mu_{d+1} = r+k$. Тогда

$$\frac{\mu_{d+1}}{n''} \leq \frac{\deg_b f}{n'} \leq \frac{1}{m+\alpha} + \varepsilon_{n'} \quad (4.6)$$

в силу леммы 3.4, где $n' = n - n_1$, а n_1 — количество единиц, подставленных в h вместо x_1, \dots, x_n .

Теперь мы получим неравенство аналогичное (4.6) при $\lambda_{d+3} = 0$. В этом случае $h(x_1, \dots, x_n)$ зависит от $r = \lambda_{d+2}$ кососимметричных наборов размера $d+2$. Если в каждый из них были подставлены оба элемента $1 \in A^\#, b \in A$, то те же рассуждения, что и выше, дают нам соотношение (4.6). В противном случае мы либо подставляем в $r-1$ из них единицу и во все r элемент b , либо наоборот — в r единицу и в $r-1$ — базисный элемент b . Перебрасывая, если необходимо, клетки из $(d+1)$ -й строки D_λ в $(d+2)$ -ю (как и при $\lambda_{d+3} = 1$) и вычеркивая строку длины $r+t$ (k и t определяются также как в случае $\lambda_{d+3} = 1$), мы получаем разбиение $\mu \vdash n'' = n - r - t$ с $\mu_{d+1} = r+k$. При этом в первом из случаев мы получаем неравенства

$$\mu_{d+1} \leq \deg_b f; \quad n'' \geq n - n_1 + 1 \geq n - n_1 = n',$$

а во втором случае — неравенства

$$\mu_{d+1} \leq \deg_b f + 1; \quad n'' \geq n - n_1 = n'.$$

Очевидно, что в первом случае разбиение μ удовлетворяет условию (4.6), а во втором — условию

$$\frac{\mu_{d+1}}{n''} \leq \frac{\deg_b f}{n'} \leq \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_{n'} + \frac{1}{n'}. \quad (4.7)$$

Поскольку (4.6) — более сильное ограничение, чем (4.7), можно считать, что $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{d+1}) \vdash n''$ всегда удовлетворяет неравенству (4.7), в котором $n'' \leq n$ и $n'' \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а $n' = n - n_1$, где n_1 — количество единиц, подставленных в $h(x_1, \dots, x_n)$, чтобы получить ненулевое значение.

Заметим сначала, что $\lambda_1 \geq n_1$ в силу кососимметричности h по λ_1 наборам переменных. Обозначим $x = \frac{\lambda_1}{n}$. Тогда

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi \left(x, \underbrace{\frac{1-x}{d+2}, \dots, \frac{1-x}{d+2}}_{d+2} \right) = H(x)$$

Предел функции $H(x)$ при $x \rightarrow 1$ равен 1. Это, в частности, означает, что существует такое целое q , что если $\lambda_1 \geq \frac{q-1}{q}n$, то $\Phi(\lambda) < d$ для всех достаточно больших $n \geq N$.

Разделим теперь все разбиения $\lambda \vdash n \geq N$ на две группы — где $\lambda_1 > \frac{q-1}{q}n$ и где $\lambda_1 \leq \frac{q-1}{q}n$. Для всех разбиений первой группы неравенство

$$\Phi(\lambda) < d < \Phi_d\left(\frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon\right)$$

выполняется в силу выбора q и n . Для разбиений из второй группы воспользуемся соотношением (4.7). Диаграмма D_μ получена из $D_{\lambda'}$ вычеркиванием строки, а $D_{\lambda'}$ получена из D_λ переносом вниз нескольких клеток. Поэтому по леммам 2.2 и 2.3 $\Phi(\lambda) \leq \Phi(\lambda') \leq \Phi(\mu) + 1$. Тогда из (4.7) следует, что

$$\Phi(\lambda) \leq \Phi(\mu) + 1 \leq \Phi\left(\theta, \dots, \theta, \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_{n'} + \frac{1}{n'}, \frac{1}{n''}\right),$$

используя свойства Φ , где

$$d\theta + \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon_{n'} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} = 1.$$

Так как $\lambda_1 \leq \frac{q-1}{q}n$, то $n' = n - n_1 \geq n - \lambda_1 \geq \frac{n}{q}$. Поэтому $n' \rightarrow \infty$ также как и n'' с ростом n и $\varepsilon_{n'} \rightarrow 0$. Как и в доказательстве леммы 3.4, получаем, что

$$\Phi(\lambda) \leq 1 + \Phi\left(\theta', \dots, \theta', \frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon, 0\right) = 1 + \Phi_d\left(\frac{1}{m + \alpha} + \varepsilon\right)$$

для всех достаточно больших n . Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, мы получаем

$$\overline{\exp}(A^\#) \leq 1 + \Phi_d\left(\frac{1}{m + \alpha}\right) = \exp(A) + 1.$$

Комбинация лемм 4.3 и 4.4 сразу дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть m и d — целые числа, $m \geq 2, m - 1 \geq d$, а w — бесконечное периодическое слово или слово Штурма. Если $A = A(m, d, w)$ и $A^\#$ получена из A присоединением единицы, то $\exp(A^\#)$ существует, причем $\exp(A^\#) = \exp(A) + 1$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого вещественного числа $\gamma \geq 2$ существует (в общем случае неассоциативная) алгебра A_γ с единицей с РИ-экспонентой $\exp(A_\gamma) = \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При заданном d совокупность значений

$$\left\{ \Phi_d\left(\frac{1}{m+\alpha}\right) = \exp(A(m, d, w)) \mid 0 \leq \alpha \leq 1, \quad m = d+1, d+2, \dots \right\}$$

покрывает весь промежуток $(d, d+1]$. Следовательно, любое вещественное число $\gamma > 2$ реализуется как экспонента $\exp(A^\#)$, где $A = A(m, d, w)$ для подходящих m, d и w . Для $\gamma = 2$ есть много реализаций даже в ассоциативном случае. Например, для бесконечномерной алгебры Грассмана G с единицей $c_n(G) = 2^{n-1}$ ([34] или [24; теорема 4.1.8]). Поэтому $\exp(G) = 2$.

Отдельный интерес представляет вопрос о множестве значений РИ-экспонент конечномерных алгебр. Ясно, что если поле F счетно, то и это множество счетно. В работе [13] показано, что множество $\{\exp(A) \mid \dim A < \infty\}$ всюду плотно в $[1; \infty)$, а в работе [4] доказано, что для конечномерной унитарной алгебры A рост $\{c_n(A)\}$ либо полиномиален, либо ограничен снизу показательной функцией 2^n .

Еще одним следствием теорем 1 и 2 является тот факт, что совокупность РИ-экспонент конечномерных алгебр с единицей является всюду плотным подмножеством в области $[2; \infty) \subset \mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любых вещественных $2 \leq \alpha < \beta$ существует конечномерная (в общем случае неассоциативная) алгебра B с единицей, такая, что

$$\alpha \leq \exp(B) \leq \beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим алгебру $A(m, d, w)$, где w — бесконечное периодическое слово с периодом T , и вместе с ней — конечномерную алгебру $B = B(m, d, w)$ с базисом

$$\{a_1, \dots, a_d, b, z_{jk}^i \mid 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m + w_j, 1 \leq k \leq T\}$$

и таблицей умножения

$$z_{jk}^i a_i = \begin{cases} z_{j+1,k}^i, & \text{если } j < m + w_k \\ 0, & \text{если } j = m + w_k, \end{cases}$$

$$z_{m+w_k,k}^i b = \begin{cases} z_{1k}^{i+1}, & \text{если } i < d \\ z_{1,k+1}^1, & \text{если } i = d, k < T \\ z_{11}^1, & \text{если } i = d, k = T. \end{cases}$$

Легко заметить, что алгебры $A(m, d, w)$ и $B(m, d, w)$ PI-эквивалентны, т.е. имеют одни и те же тождества. Но тогда и алгебры $A(m, d, w)^\#$ и $B(m, d, w)^\#$ тоже PI-эквивалентны. Поэтому $\exp(A(m, d, w)^\#) = \exp(B(m, d, w)^\#)$. В частности, $\exp(B(m, d, w)^\#) = \exp(A(m, d, w)) + 1$.

По предложению 1 для любого рационального $q \in (0; 1)$ существует периодическое слово w с наклоном $\pi(w) = q$. Но тогда

$$\exp(B(m, d, w)^\#) = \Phi_d\left(\frac{1}{m+q}\right) + 1$$

в силу теоремы 2. Поэтому можно подобрать такое рациональное положительное $q < 1$, что $\alpha \leq \exp(B(m, d, w)^\#) \leq \beta$.

Список литературы

- [1] А. Джамбруно, М. В. Зайцев, “Асимптотическое возрастание последовательностей коразмерностей тождеств ассоциативных алгебр”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика.*, 2014, № 3, 54–56.
- [2] A. Giambruno, M. Zaicev, “Growth of polynomial identities: is the sequence of codimensions eventually non-decreasing?”, *Bull. London Math. Soc.*, **46**:4 (2014), 771–778.
- [3] A. Regev, “Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal”, *Israel J. Math.*, **47**:2-3 (1984), 246–250.
- [4] A. Giambruno, A. Regev, M. Zaicev, “Simple and semisimple Lie algebras and codimension growth”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:4 (2000), 1935–1946.
- [5] A. Giambruno, I. Shestakov, M. Zaicev, “Finite dimensional nonassociative algebras and codimension growth”, *Adv. Appl. Math.*, **47** (2011), 125–139.
- [6] Ю. П. Размыслов, “Простые алгебры Ли в многообразиях, порожденных алгебрами Ли картановского типа”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:6 (1987), 1228–1264.
- [7] W. Specht, “Gesetze in Ringen. I. (German)”, *Math. Z.*, **52**:2 (1950), 557–589.
- [8] А. Р. Кемер, “Об асимптотическом базисе тождеств алгебр с единицей из многообразия $\text{Var}(M_2(F))$ ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1989, № 6, 71–76.
- [9] V. Drensky, “Relations for the cocharacter sequences of T-ideals. Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 2 (Novosibirsk, 1989)”, *Contemp. Math.*, **131**:Part 2 (1992), 285–300.
- [10] V. Drensky, A. Regev, “Exact asymptotic behaviour of the codimensions of some P.I. algebras”, *Israel J. Math.*, **96** (1996), 231–242.
- [11] A. Berele, A. Regev, “Asymptotic behaviour of codimensions of p. i. algebras satisfying Capelli identities”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**:10 (2008), 5155–5172.
- [12] A. Berele, “Properties of hook Schur functions with applications to p.i. algebras”, *Adv. in Appl. Math.*, **41**:1 (2008), 52–75.
- [13] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Codimensions of Algebras and Growth Functions”, *Adv. Math.*, **217**:3 (2008), 1027–1052.
- [14] М. В. Зайцев, “Тождества конечномерных унитарных алгебр”, *Алгебра и логика*, **50**:5 (2011), 563–594.
- [15] A. Giambruno, M. Zaicev, “Proper identities, Lie identities and exponential codimension growth”, *J. Algebra*, **320**:5 (2008), 1933–1962.
- [16] A. Giambruno, M. Zaicev, “On codimension growth of finitely generated associative algebras”, *Adv. Math.*, **140** (1998), 145–155.

- [17] A. Giambruno, M. Zaicev, “Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate”, *Adv. Math.*, **142** (1999), 221–243.
- [18] О. Е. Безущак, А. А. Беляев, М. В. Зайцев, “Коразмерности тождеств алгебр с присоединённой единицей.”, *Фундам. и прикл. матем.*, **18**:3 (2013), 11–26.
- [19] D. Repovš, M. Zaicev, “Numerical invariants of identities of unital algebras”, *Comm. Alg.*, **43**:9 (2015), 3823–3839.
- [20] С. М. Рацеев, “Алгебры Пуассона полиномиального роста”, *Сиб. мат. ж.*, **54**:3 (2013), 700–711.
- [21] С. М. Рацеев, “Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли на языке тождеств”, *Матем. заметки*, **96**:4 (2014), 567–577.
- [22] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
- [23] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra*, Springer-Verlag, Singapore, 2000.
- [24] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Mathematical Surveys and Monographs, 122, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [25] A. Regev, “Existence of identities in $A \otimes B$ ”, *Israel J. Math.*, **11** (1972), 131–152.
- [26] Yu. Bahturin, V. Drensky, “Graded polynomial identities of matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **357** (2002), 15–34.
- [27] М. В. Зайцев, “Многообразия аффинных алгебр Каца-Муди”, *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 95–102.
- [28] С. П. Мищенко, “Рост многообразий алгебр Ли”, *УМН*, **45**:6 (1990), 25–45.
- [29] Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп*, Наука, М., 1982.
- [30] A. Giambruno, M. Zaicev, “On codimension growth of finite dimensional Lie superalgebras”, *J. London Math. Soc.*, **95** (2012), 534–548.
- [31] М. Зайцев, Д. Реповш, “Четырёхмерная простая алгебра с дробной PI-экспонентой”, *Матем. заметки*, **95**:4 (2014), 538–553.
- [32] M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [33] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Algebras with intermediate growth of the codimensions”, *Adv. in Appl. Math.*, **37**:3 (2006), 360–377.
- [34] D. Krakowski, A. Regev, “The polynomial identities of the Grassmann algebra”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **181** (1973), 429–438.

М. В. Зайцев (M. V. Zaicev)

МГУ имени М. В. Ломоносова

E-mail: zaicevmv@mail.ru

Поступила в редакцию

21.08.2014

Д. Реповш (D. Repovš)

Университет Любляны, Словения

E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si